# 同変リプシッツ同相群の1次元ホモロジー群 (変換群の幾何とその周辺)



阿部, 孝順

数理解析研究所講究録
第1612巻 2008年 69-75



# 同変リプシッツ同相群の1次元ホモロジー群

(On the first homology group of equivariant Lipschitz homeomorphism groups.)

信州大学・理学部　阿部 孝順 (Kōjun Abe )
Faculty of Science, Shinshu University
e-mail: kojnabe@shinshu-u.ac.jp

## §1. 序

本稿では可微分多様体のリプシッツ同相群の1次元ホモロジー群についての新たな結果を述べると共に、これまでに知られている関連する結果との対比することで、リプシッツ同相群の1次元ホモロジー群の研究の位置付けについても考察する。

$M$, $N$: 可微分多様体

$f:\ M \to N$ がリプシッツ写像 とは, $\forall p \in M$ に対して $p$ の回りの局所座標 $(U, \varphi)$ と $f(p)$ の回りの局所座標 $(V, \psi)$ $(f(U) \subset V)$ と $K > 0$ が存在して 次の条件を満たすことである:

$$|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y)| \leq K|x-y|, \quad (x, y \in \varphi(U)).$$

また $f$ と $f^{-1}$ が共にリプシッツ写像であるときにリプシッツ同相写像であるという。

$L(M)$: コンパクトな台をもつイソトピーで恒等写像とイソトピックな $M$ のリプシッツ同相全体にコンパクト開位相を入れた位相群

コンパクトな台をもつ $M$ のリプシッツ同相全体の集合 $\mathcal{L}(M)$ には次のようにして, コンパクト開リプシッツ位相を 入れる ことができる。

$K$ を $M$ の座標近傍 $U$ に含まれるコンパクト部分集合とする。$f$ を $M$ のリプシッツ同相で $f(K)$ が $M$ の座標近傍 $V$ に含まれるものとする。

$\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{N}(f; (U, \varphi), (V, \psi), K, \varepsilon)$ を次の条件を満たす $M$ のリプシッツ同相 $g$ の集合とする。

(1) $|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)| < \varepsilon \quad (x \in K)$.

(2) $|((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)) - ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y) - (\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(y))|$
$< \varepsilon|x-y| \quad (x, y \in K)$.

このような集合 $\mathcal{N}(f;(U,\varphi),(V,\psi),K,\varepsilon)$ の系は $\mathcal{L}(M)$ のコンパクト開リプシッツ位相の準基をなす。
$\mathcal{H}_{LIP}(M)$: $\mathcal{L}(M)$ のコンパクト開リプシッツ位相による恒等写像の連結成分

次に可微分 $G$-多様体の同変リプシッツ同相群についても同様な考察をする。
$G$: コンパクトリー群
$M$: 可微分 $G$-多様体
$L_G(M)$ ($\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$): 可微分 $G$-多様体のコンパクトな台をもつ 同変リプシッツ同相全体の集合にコンパクト開位相 (コンパクト開リプシッツ位相) を入れた位相群の恒等写像の連結成分

一般に群 $K$ がその交換子群 $[K,K]$ と一致するとき，完全群であるという。また $K$ の 1 次元ホモロジー群は $H_1(K)=K/[K,K]$ で与えられる。この論説では、可微分 $G$-多様体 $M$ が余次元 1 軌道をもつ場合に、$H_1(\mathcal{H}_{LIP}(M))$ の構造を決定する。

最初に $M$ が $G$ の表現空間 $V$ の場合に考察する。

**Theorem 1.1** ([AF6]) コンパクトリー群 $G$ の表現空間 $V$ が余次元 1 軌道をもつとき、$\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は完全群である。

この結果と対照的に、一般に $V$ が余次元 1 軌道をもつ場合に $L_G(V)$ は完全群ではない。実際 $V$ が標準的な $U(n)$-作用をもつ複素 $n$ 次元表現空間 $\mathbf{C}^n$ について、$H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n))$ は区間 $(0,1]$ 上のある関数空間の商空間と同型になり、また連続的な モジュライをもつことが証明される ([AFM])。一方 [AF1] では恒等写像にイソトピックでコンパクトな台をもつ可微分 $G$-多様体 $M$ の同変微分同相群 $\mathcal{D}_G(M)$ に対して $H_1(\mathcal{D}_G(M))$ を決定した。特に $H_1(\mathcal{D}_{U(n)}(\mathbf{C}^n))\cong\mathbf{R}\times U(1)$ が示される。従って可微分 $G$-多様体の同型群の構造に考察する圏の性質が大変良く反映することが分かる。

次に一般の余次元 1 軌道をもつ $G$-多様体 $M$ の場合を考える。このとき軌道空間 $M/G$ は $S^1$ または $[0,1]$ に同相になる。$M/G$ が $S^1$ に同相の場合は $G$-多様体 $M$ は唯 1 つの軌道型をもち、[AF2] の結果より、$\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は完全群であることが分かる。$M/G$ が $[0,1]$ に同相の場合は $M$ は 2 または 3 個の軌道型をもつ。$M$ の主軌道型を $(H)$、特異軌道型を $(K_0),(K_1)$ をする。

$$W(M)=\left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{K_0}\times\frac{N(H)\cap N(K_1)}{K_1}\right)_0$$

とおく。ここで $N(H)$ は $H$ の $G$ における正規化群である。このとき、次の結果が証明される。

**Theorem 1.2** ([AF6]) $H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M)) \cong H_1(\bar{W}(M))$.

## §2. Theorem 1.1 の証明の方針

以下では簡単のために、$V = \mathbf{C}$ を $G = U(1)$ の標準的表現空間である場合を考察する。
$e = (1, 0)$ とおく。
$\pi:\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}/U(1)$ 自然な射影
$p:\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+$; $p(v) = |v|^2$.
このとき $p$ は同相写像 $\bar{p}:\ \mathbf{C}/U(1) \to \mathbf{R}_+$ を導く。
$P:\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$,

$$P(h)(x) = |h(\sqrt{x}e)|^2 \quad (x \in \mathbf{R}_+)$$

$\Psi : \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+) \to \mathcal{H}_{LIP,G}(V)$ を次の式で定義する。

$$\Psi(f)(v) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{f(|v|^2)}}{|v|} v & (v \neq 0) \\ 0 & (v = 0) \end{cases}$$

**Lemma 2.1** $P:\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$ は群準同型写像で、$\Psi$ は $P$ の右逆準同型である。

[AF2], Theorem 5.1, Corollary 5.5 より、$\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)$ は完全群であるので, $H_1(\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}))$ の完全性を示すには、$KerP$ の構造を調べればよい。

$h \in KerP$
$a_h : \mathbf{R}_+ = (0, \infty) \to U(1)$ を次の等式を満たすように定義する。

$$h(x \cdot e) = x a_h(x^2) \cdot e \quad \text{for} \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

$E:\ \mathbf{R} \to U(1)$ 指数写像
$h$ は次の条件 (1),(2) を満たすと仮定してよい。
(1) $supp(h) \subset \pi^{-1}((0, 1])$
(2) $\varepsilon > 0$ に対して、$h$ はコンパクト開リプシッツ位相で $1_V$ に $\varepsilon$-close

$\hat{a}_h:\ (0, 1] \to \mathbf{R}$ を $E \circ \hat{a}_h = a_h$, $\hat{a}_h(1) = 0$ を満たす写像とする。

$\mathcal{C}(\mathbf{R})$ : 次の条件 (L) を満たす $(0,1]$ 上の実数値関数 $f$ 全体の集合
(L): $K>0$ が存在して次の条件をみたす；

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{K}{x}(y-x) \quad \text{for } 0<x\leq y\leq 1.$$

$\mathcal{C}_0(\mathbf{R})=\{f\in\mathcal{C}(\mathbf{R}):\ f$ は有界な関数$\}$

**Lemma 2.2** $\hat{a}_h\in\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$.

逆に $\alpha\in\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ が $\alpha(1)=0$ で条件 (L) を満たすとする。

$$h_\alpha(xg\cdot e)=\begin{cases} xgE(\alpha(x))\cdot e & 0<x\leq 1,\ g\in G \\ 0 & x=0 \\ xg\cdot e & x>1. \end{cases}$$

**Lemma 2.3** $h_\alpha\in KerP$.

**Lemma 2.4** 次の条件 (1), (2) を満たす写像 $\beta,\gamma:(0,1]\to W_1$ が存在する。
(1) $\beta,\gamma$ は条件 $(L)$ を満たす,
(2) $h_\beta\circ h_\gamma=h$.

次の命題が Theorem 1.1 の証明の鍵となる。

**Proposition 2.5** 次の条件を満たす $\xi\in\mathcal{H}_{LIP}([0,1])$ と $(0,1]$ 有界な実数値関数 $\lambda$ が存在する。
(1) $\lambda$ は条件 $(L)$ を満たす,
(2) $\beta=\lambda\circ\xi-\lambda$.

Proposition 2.5 より

$$h_\lambda^{-1}\circ\Psi(\xi)^{-1}\circ h_\lambda\circ\Psi(\xi)=h_{\lambda\circ\xi-\lambda}=h_\beta.$$

従って $h_\beta\in[KerP,\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]$.

同様に $h_\gamma\in[KerP,\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]$ が証明される。故に Lemma 2.4 より $h\in[KerP,\ \mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]$. 従って $KerP\subset[KerP,\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]$ が示された。

Lemma 2.1 より次は完全列である。

$$KerP/[KerP,\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})]\to H_1(\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C}))\to H_1(\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+)\to 0.$$

[AF2], Theorem 5.1 より $H_1(\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}_+))=0$ である。従って $\mathcal{H}_{LIP,U(1)}(\mathbf{C})$ は完全群であることが示された。

一般の余次元1軌道をもつ$G$の表現空間の場合は、$G = U(1)$, $V = \mathbf{C}$ の証明に帰着できることが証明される。

## §3. Theorem 1.2 の証明の方針

$M$ を余次元1軌道をもつ可微分 $G$-多様体で軌道空間 $M/G$ は $[0,1]$ と同相とする。このとき $M$ は次のように表されることが知られている。

$$M = G \times_{K_0} D(V_0) \cup_\eta G \times_{K_1} D(V_1)$$

ここで $V_i$ は $K_i$ の表現空間で、$D(V_i)$ は $V_i$ の単位円板、$\eta$ は境界を張り合わせる同変微分同相である。

**Lemma 3.1** ([A], Lemma 1.2) *There exist a smooth $G$-map $\theta : M \to [0,1]$ and a $G$-diffeomorphism $\alpha : \theta^{-1}((0,1)) \to G/H \times (0,1)$ such that*

(1) $\phi :\ M/G \to [0,1]$ *is a homeomorphism, where $\phi$ is the map induced from the G- map $\theta$ satisfiying $\phi \circ \pi = \theta$.*

(2) $\theta \circ \alpha^{-1} :\ G/H \times (0,1) \to (0,1)$ *is the projection on the second factor.*

(3) $\theta^{-1}([0,\frac{1}{2}]) = G \times_{K_0} D(V_0)$ *and* $\theta^{-1}([\frac{1}{2},1]) = G \times_{K_1} D(V_1)$.

(4) $\theta([g,v]) = |v|^2$ *for* $[g,v] \in G \times_{K_0} D(V_0)$ *with* $|v| \le \frac{1}{2}$,
$\theta([g,v]) = 1 - |v|^2$ *for* $[g,v] \in G \times_{K_1} D(V_1)$ *with* $|v| \le \frac{1}{2}$.

$P : \mathcal{H}_{LIP,G}(M) \to \mathcal{H}_{LIP,G}([0,1])$ を次の式で定義される自然な写像とする。

$$P(h)(\theta(x)) = \theta(h(x)) \quad \text{for } h \in D_G(M),\ x \in M.$$

**Proposition 3.2** $P$ の右逆準同型 $\Psi : \mathcal{H}_{LIP,G}([0,1]) \to \mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ が存在する。

$h \in KerP$ に対して $\hat{h}$ を次の合成写像で定義する。

$$G/H \times (0,1) \xrightarrow{\alpha^{-1}} \theta^{-1}((0,1)) \xrightarrow{h} \theta^{-1}((0,1)) \xrightarrow{\alpha} G/H \times (0,1).$$

このとき $\hat{h}$ は level preserving equivariant Lipschitz homeomorphism である。

$a_h :\ (0,1) \to N(H)/H$ を次の式で与えられる写像とする。

$$\hat{h}(gH,x) = (ga_h(x),x), \quad (gH,x) \in G/H \times (0,1).$$

$\pi_i : G/H \to G/K_i$ $(i = 0,1)$ を自然な射影とする。

**Lemma 3.3** (1) 次の極限点が存在する。

$$T_0(h) = \lim_{x\to 0} \bar{\pi}_0(a_h(x)) \in (N(H)\cap N(K_0))/K_0,$$

$$T_1(h) = \lim_{x\to 1} \bar{\pi}_1(a_h(x)) \in (N(H)\cap N(K_1))/K_1.$$

(2) $h(gK_0) = gT_0(h)$, $h(gK_1) = gT_1(h)$ *for* $g \in G$.

$$T : Ker\,P \to \bar{W}(M) = \left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{K_0} \times \frac{N(H)\cap N(K_1)}{K_1}\right)_0$$

を $T(h) = (T_0(h)^{-1}, T_1(h)^{-1})$ で定義される写像とする。このとき $T$ は群準同型である。

$$\hat{T} : \mathcal{H}_{LIP,G}(M) \to \bar{W}(M) = \left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{K_0} \times \frac{N(H)\cap N(K_1)}{K_1}\right)_0$$

を $\hat{T}(h) = T(\Psi(P(h^{-1})\circ h))$ と定義する。

**Corollary 3.4** $\hat{T}$ は全射群準同型である。

**Proposition 3.5** $Ker\,\hat{T} \subset [Ker\,\hat{T}, \mathcal{H}_{LIP,G}(M)]$.

*Proof of Theorem 1.2.* Corollary 3.4 より次は完全列である：

$$Ker\hat{T}/[Ker\hat{T}, \mathcal{H}_{LIP,G}(M)] \to H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M)) \to H_1(\bar{W}(M)) \to 0.$$

従って Proposition 3.5 により $H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M)) \cong H_1(\bar{W}(M))$, であることが分かり Theorem 1.2 は証明される。

**Example 3.6**

$$M = U(n) \times_{U(1)} D^2 \cup U(n) \times_{U(1)} D^2.$$

ここで $U(1)$ の作用は $D^2 = \{w \in \mathbf{C} |\ |w| = 1\}$ 自然な作用とする。このとき

$$H = \{1\},\ K_0 = K_1 = U(1), N(H)/H = U(n),$$
$$((N(H)\cap N(K_i))/H = U(1)\times U(n-1).$$
$$((N(H)\cap N(K_i))/K_i = U(n-1).$$

従って

$$H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M)) \cong H_1(U(n-1)\times U(n-1)) \cong U(1)\times U(1).$$

# 参考文献

[A] K. Abe, *On the homotopy type of the groups of equivariant diffeomorphisms*. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 16(1980), 601-626.

[AF1] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, Topology, 40 (2001), 1325-1337.

[AF2] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.

[AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, J. Math. Soc. Japan, 55 (2003), 947-956.

[AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures*, Central European Jour. Math. 3, (2005), 516 - 528.

[AF5] K. Abe and K. Fukui, *The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications*, Jour. Topology 1, (2008), 461-476.

[AF6] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of the group of Lipschitz homeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, preprint.

[AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan, 58 (2006), 1-15.

[Ma] Mather,J.N., *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology, 10 (1971), 297-298.

[Ry] T. Rybicki, *On commutators of equivariant homeomorphisms*, Topology and its applications, 154(2007), 1561-1564.

[TS] T. Tsuboi, *On the perfectness of groups of diffeomorphisms of the interval tangent to the identity at the endpoints*, Foliations; geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002), 421-440.